Exercice 1 **5 points**

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache. On réalise une étude dans une région dont 0,4 % de la population de vaches est infectée. Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie. Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ». On choisit une vache au hasard dans la région.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0,992 ;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984.

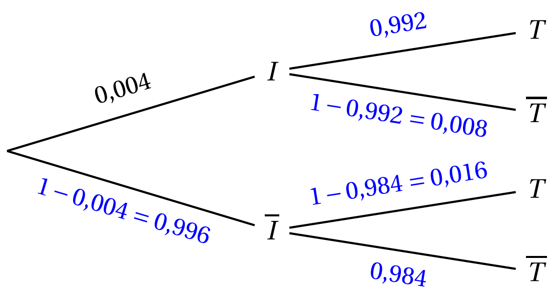
On désigne par :

- I l'évènement « la vache est atteinte par l'infection » ;
- T l'évènement « la vache présente un test positif ».

On note $\overline{I}$ l'évènement contraire de I et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. **a.** La probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif est : $P\left(\overline{I}\cap\overline{T}\right)=0{,}996\times 0{,}984\approx 0{,}980$.

b. La probabilité que la vache présente un test positif est $P(T)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(T)=P(I\cap T)+P\left(\overline{I}\cap T\right)=0{,}004\times 0{,}992+0{,}996\times 0{,}016=0{,}019\,904$ soit 0,020 à 10^{-3} près,

c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif, c'est-à-dire : $P_T(I)$.

$P_T(I)=\dfrac{P(I\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}004\times 0{,}992}{0{,}02}\approx 0{,}199$

d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(\overline{I}\cap T\right)$, ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test, c'est-à-dire avec une probabilité de $P\left(I\cap\overline{T}\right)$.

La probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache est donc : $P\left(\overline{I}\cap T\right)+P\left(I\cap\overline{T}\right)=0{,}996\times 0{,}016+0{,}004\times 0{,}008=0{,}015\,968\approx 0{,}016$ au millième près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. L'expérience élémentaire consiste à savoir si, pour une vache donnée, le test est positif (avec une probabilité $p = 0{,}02$) ou non ; il n'y a donc que deux issues.

On exécute cette expérience élémentaire 100 fois pour extraire un échantillon de taille $n = 100$ en assimilant ce choix à un tirage avec remise.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}02$.

b. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif est : $P(X = 3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times (1 - 0{,}02)^{100-3} \approx 0{,}182$.

c. La probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif est : $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}859$ (résultat donné par la calculatrice).

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

La valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99 est telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$.

C'est-à-dire : $1 - P(X = 0) \geqslant 0{,}99$ ou encore : $0{,}01 \geqslant P(X = 0)$.

On résout l'inéquation : $P(X = 0) \leqslant 0{,}01$.

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}02^0 \times (1 - 0{,}02)^{n-0} = 0{,}98^n$$

$$0{,}98^n \leqslant 0{,}01 \iff \ln\left(0{,}98^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \times \ln(0{,}98) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}95$ donc il faut un échantillon d'au moins 228 vaches pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.